数理解析研究所講究録
22巻 1967年 77-87

Sobolev空間の埋蔵定理の証明について

村松寿延（京大 数理解析研）

0：序

次の定理の簡単な証明を得たのでご報告する

埋蔵定理　$1<p\le q<\infty$, $l, k\ge 0$, $l-\frac{n}{p}+\frac{m}{q}-k\ge 0$ のとき次の附加条件の下で埋蔵作用素

$$W^{l,p}(\Omega)\to W^{k,q,n-m}(\Omega)$$

が存在する。すなわち，$C^\infty(\Omega)$ の $W^{l,p}$ 上で恒等作用素に等しい連続作用素が存在する。

Ωに関する条件：Ωはn次元空間R^nの領域であって，円錐条件をみたす。すなわち，Ωの各点xに対してベクトル$\Psi(x)$を次のように定めることができる：

(a) $x\in\Omega$,　$0\le t\le T_0$, $z\in Q$ $\Rightarrow$ $x+tz+t\Psi(x)\in\Omega$

(b) ΨはΩ上で有界であって，Ω上で一様に Lipschitz 連続である。

ただし，T_0はxに独立な定数 Qは原点を中心とする立方体。

指数に関する条件：

(i) $p<q$, $m>0$ または (ii) $m=0$, $k\neq$整数 または (iii) $l-\frac{n}{p}+\frac{m}{q}-k>0$

注意　$p=q\le 2$, $n>m>0$, $l-\frac{n-m}{p}-k=0$ の場合および，$p=q>2$, $m>0$, $l-\frac{n-m}{p}-k=0$, $k\neq$整数の場合にも定理は正しい。$p=q>2$, $n>m>0$, $l-\frac{n-m}{p}-k=0$, $k=$整数の場合には定理は成立しない([14])。

$W^{l,p,n-m}$ の定義を述べる。まずΩ上の函数 f について，

$$\|f\|_{L^{p,n-m}(\Omega)}=\sup_{x''\in R^{n-m}}\|f(x',x'')\|_{L^p(\Omega(x''))},\quad \text{ただし，}\ \Omega(x'')=\{x'\mid (x',x'')\in\Omega\}$$

（m次元平面による切口）

である．$f \in C^{\infty}(\Omega)$，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して，$f^{(\alpha)}$ で f の α 階導函数を示し，l が整数のとき，

$$|f|_{l,p,n-m,\Omega} = \sum_{|\alpha|=l} \| f^{(\alpha)} \|_{L^{p,n-m}(\Omega)} \quad , \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

と定め，$l = [l] + \sigma$，$0 < \sigma < 1$ のときは，

$$|f|_{l,p,n-m,\Omega} = \sum_{|\alpha|=[l]} \left\| \frac{f^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(y)}{|x-y|^{\frac{m}{p}+\sigma}} \right\|_{L^{p,2n-2m}(\Omega \times \Omega)}$$

と定義する．

$C^{\infty}(\Omega)$ に属し，$|f|_{0,p,n-m,\Omega} + |f|_{l,p,n-m,\Omega} < \infty$ となる f の全体をこのノルムで完備化した空間を $W^{l,p,n-m}(\Omega)$ と定義する。特に，$L^{p,0} = L^p$ であって $W^{l,p,0}$ を $W^{l,p}$ とかく。また $W^{l,p,n}$ のノルムは p に無関係であるから $\mathcal{B}^l(\Omega)$ とかく。たとえば $\mathcal{B}^2(\Omega)$ のノルムは

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sum_{|\alpha|=2} \sup_{x \in \Omega} |f^{(\alpha)}(x)|$$

である．

Sobolev [10] が最初に $l =$ 整数，$k = 0$，$m = n$，$q > p > 1$ の場合について埋蔵定理を示した（1938）．Sobolev の表示とよばれている，potential 型の積分表示を用いた。さらに Sobolev は $l, k =$ 整，m 一般の場合も証明した【11】．ただし Ω は有界，$l - \frac{n}{p} + \frac{m}{q} - k > 0$ の場合である。(1950)．

Gagliardo [2]，(1958)，と Nirenberg [6]，(1959) は互に独立に，Sobolev とは違った方法で，一般の埋蔵定理を証明している．ただし，l，k が分数の場合は，定理が成立すると書いてあるだけで，証明はない．これより前 Nicolas du Plessis [8]，(1955) は $l =$ 整，$m = 0$，$k \neq$ 整の場合（すな

わち B^k への埋蔵）および l, k = 整, $l-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}-k=0$, $m=n$, $\Omega=R^n$ の場合を証明している。

l, k 非整の場合について, $p=2$ の場合は Slobodetskii [9] が扱い, 一般の場合を Besov [1] (1959), Uspenskii [12], [13] (1960) が結果を報告している. 証明はない.

l, k が整数でない場合を扱う一つの方法は "空間の interpolation" であるが, Lions [5] (1961) の証明ではすべての場合を cover しない。最近, Peetre [7] (1966) はこの方法ですべての場合を cover する証明を与えている。

以下において, われわれは Sobolev の表示と本質的には同じであるが見かけ上異なる積分表示を用いて証明する。積分表示の形が有効に働いて計算の見通しをよくし, l, k が分数の場合を含めて, 簡単な証明が得られるのである.

1. 積分表示と定理の証明.

立方体 Q に台をもち, $C^\infty(R^n)$ に属し, $\int \varphi(z)\,dz = 1$ となる函数 φ を一つ定めておく。$f \in C^\infty(\Omega)$, l を整数とする。$x \in \Omega$ を固定し, 函数

$$f(x+tz+t\Psi(x)), \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad z \in Q$$

を考える。t について T で展開し, $t=0$ とおき, $\varphi(z)$ を乗じて, z で積分すると,

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=l} \int_0^T t^{l-1}\,dt \int \frac{(-1)^l l}{\alpha!} (z+\Psi(x))^\alpha f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x))\,dz$$

$$+ \sum_{|\alpha|<l} T^{|\alpha|} \int \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (z+\Psi(x))^\alpha f^{(\alpha)}(x+Tz+T\Psi(x))\,\varphi(z)\,dz \qquad \cdots\cdots (1)$$

をうる。ただし, $0 < T \leq T_0$ とし, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ と表わす。

$$T^{|\alpha|} f^{(\alpha)}(x + Tz + T\Psi(x)) = D_z^{\alpha} f(x + Tz + T\Psi(x))$$

であるから，第2項で z について部分積分を行うと，第2項は

$$\sum_{|\alpha|<l} \int \varphi_\alpha(z)\,(z+\Psi(x))^{\alpha} f(x + Tz + T\Psi(x))\,dz$$

の形になる。$l+1$ について公式(1)を用いて，第1項において，たとえば，$\alpha_j \neq 0$ のとき，$\beta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j - 1, \cdots, \alpha_n)$ とおくと

$$t f^{(\alpha)}(x + tz + t\Psi(x)) = \frac{\partial}{\partial z_j}\left(f^{(\beta)}(x + tz + t\Psi(x)) \right)$$

であることに注目して部分積分を行い，

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=l} \int_0^T t^{l-1} dt \int \varphi_\alpha(x,z) f^{(\alpha)}(x + tz + t\Psi(x))\,dz$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leq l} \int \varphi_\alpha(z)\,(z+\Psi(x))^{\alpha} f(x + Tz + T\Psi(x))\,dz \qquad \text{---- (2)}$$

となる。ただし，

$$\varphi_\alpha(x,z) = \frac{(-1)^{l+1}}{\alpha!} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}\Big((z_j + \Psi_j(x))\,(z+\Psi(x))^{\alpha} \varphi(z) \Big)$$

である。大切なのは

$$\int \varphi_\alpha(x,z)\,dz = 0$$

であるから，

$$\int \varphi_\alpha(x,z) f^{(\alpha)}(x + tz + t\Psi(x))\,dz$$

$$= \iint \varphi_\alpha(x,z)\,\varphi(w)\,\{ f^{(\alpha)}(x + tz + t\Psi(x)) - f^{(\alpha)}(x + tw + t\Psi(x)) \}\,dz\,dw$$

$$\text{---} \qquad (3)$$

が成立することである。

$|\beta| \leq l$ のとき，$f^{(\beta)}(x)$ に公式(2)を適用して，さらに第2項で部分積

分を行うと，

$$f^{(\beta)}(x)=\sum_{\substack{\alpha\geq\beta\\|\alpha|=l}}\int_0^T t^{l-|\beta|-1}\,dt\int\varphi_{\alpha-\beta}(x,z)\,f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x))\,dz$$

$$+\,T^{-|\beta|}\int\psi_\beta(x,z)\,f(x+Tz+T\Psi(x))\,dz \qquad \cdots\cdots (4)$$

をうる。ここに ψ_β は z と $\varphi(z)$ の導函数の多項式を係数とする $\Psi(x)$ の多項式であって，$z\notin Q$ では恒等的に 0 となる．

この表示に関連して次の補題を示せば，埋蔵定理が証明される．

<u>補題 1.</u> $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\tilde{\Omega}\subset\mathbb{R}^{n+s}$ を領域とする。さらに $\tilde{\Omega}$ は $\tilde{Q}$, $\tilde{\Psi}(\tilde{x})$ に関して，前記の意味の円錐条件を満たしているとする。Φ を Ω から $\tilde{\Omega}$ への写像であって Ωで一様にLipschitz連続, $\Phi(x)=(x,\Phi_0(x))$ が成立するとする。$K(x,\tilde{z})$ は $\Omega\times\tilde{\Omega}$ で定義され，$\Omega\times\tilde{\Omega}$ で一様にLipschitz連続で，台は $\Omega\times\tilde{Q}$ に含まれ，有界であるとする．このとき $f\in L^p(\tilde{\Omega})$ に対して，

$$F(x)=\int_0^T\eta(t)\,dt\int f(\Phi(x)+t\tilde{z}+t\tilde{\Psi}(\Phi(x)))K(x,\tilde{z})\,d\tilde{z}$$

と定義する． $|\eta(t)|\leq t^{l-1}$ $(l>0)$ ，$0\leq k<1$, $1<p\leq q<\infty$

$\lambda=l-k-\frac{n+s}{p}+\frac{m}{q}\geq 0$ とする．さらに，

(i) $\lambda>0$

または (ii) $\lambda\geq 0$, $p<q$, $m>0$

または (iii) $\lambda\geq 0$, $m=0$, $k>0$

であれば，

$$|F|_{k,q,n-m(\Omega)}\leq C\,T^\lambda\,\|f\|_{L^p(\tilde{\Omega})} \qquad \cdots (5)$$

が成立する．ここに C は f, T に独立な定数である．

系．補題の条件の下で，$t>0$ に対して，

$$\left|\int f(\Phi(x)+t\tilde{z}+t\,\tilde{z}\cdots)\,d\tilde{z}\right|_{k,q,n-m,\Omega}\leqq C\,t^{-k-\frac{n+s}{p}+\frac{m}{q}}\,\|f\|_{L^{p}(\tilde{\Omega})} \quad (6)$$

が成立する．

<u>埋蔵定理の証明</u>．次の不等式を示せばよいことは明らかである．すなわち，

$$|f|_{k,q,n-m,\Omega}\leqq C\,\|f\|_{W^{l,p}(\Omega)} \qquad ({}^{\forall}f\in C^{\infty}(\Omega)\cap W^{l,p}).$$

l が正の整数の場合．$|\beta|=[k]$ なる β について，積分表示(4)を用い，その右辺の各項に補題1と系を，$\Omega=\tilde{\Omega}$，$\Phi(x)=x$，$S=0$ として適用すれば

$$|f^{(\beta)}|_{k-[k],q,n-m,\Omega}\leqq C\,\|f\|_{W^{l,p}(\Omega)}$$

をうる．

l が分数の場合には積分表示(4)の第1項を公式(3)のように変形して，$\Omega\ni\tilde{\Omega}=\Omega\times\Omega$，$\Phi(x)=(x,x)$，$s=n$ として補題1を使う．ただし，$K(x,\tilde{z})$ は

$$K(x,z,w)=\varphi_{\alpha}(x,z)\,\varphi(w)\,|z-w|^{\frac{n}{p}+l-[l]}$$

とし，f は

$$\tilde{f}(x,y)=\frac{f^{(\alpha)}(x)-f^{(\alpha)}(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+l-[l]}}$$

になる。

2．補題1の証明．

補題1の証明を行う．まず $k=0$ の場合は次の補題に帰着する．

補題2. 補題1の条件の下で、 $f \in L^p(\tilde\Omega)$ に対して、

(A)
$$\varphi(t,x)=\int_{\tilde Q} \left| f(\Phi(x)+t\tilde z + t\tilde\Psi(\Phi(x))) \right| d\tilde z$$

とおくと、 $t>0$ のとき、

$$\|\varphi(t,x)\|_{L^{q,n-m}(\Omega)} \le C\, t^{-\frac{n+s}{p}+\frac{m}{q}} \|f\|_{L^p(\tilde\Omega)}, \qquad \cdots (7)$$

(B)
$$\left\| \int_0^T t^{\ell-1}\varphi(t,x)\,dx \right\|_{L^{q,n-m}(\Omega)} \le C\, T^{\lambda} \|f\|_{L^p(\tilde\Omega)}. \qquad \cdots (8)$$

ただし、 $\lambda=\ell-\frac{n+s}{p}+\frac{m}{q}\ge 0$ とし、さらに

(i) $\lambda>0$ または (ii) $\lambda\ge 0$, $p<q$, $m>0$

を仮定する。

証明. f を Ω の外で零として延長しておく。 $|\tilde z_j+\tilde\Psi_j(\Phi(x))|\le M_1<\infty$ であるから

$$\varphi(t,x)=\int_{\tilde Q}|f(\Phi(x)+t\tilde z)|\,d\tilde z$$

としてよい。ただし $\tilde Q$ の一辺は M_1 である。 $\tilde Q = Q\times Q^*$, $Q\subset R^m$, $Q^*\subset R^{n+s-m}$, $\tilde z=(z,w)$, $\Phi(x)=(x',\Phi^*(x))$ とおくと、Hölder の不等式により、

$$\int_{Q^*}|f(x'+tz,\ \Phi^*(x)+tw)|\,dw \le C\, t^{-\frac{n+s-m}{p}} g(x'+tz)$$

である。ただし、 $g(x')=\left(\int_{\tilde\Omega(x')}|f(x',y)|^p dy\right)^{1/p}$ である。

特に $m=0$ ならば $\varphi(t,x)\le C t^{-\frac{n+s}{p}}\|f\|_{L^p}$ となり (7) が得られたことになる。 $m>0$ のときは、上の計算により、Jessen の不等式を使い、

$$\varphi(t,x)\le C t^{-\frac{n+s-m}{p}}\int_Q g(x'+tz)\,dz$$

[illegible] 結局 $s=0,\ m=n,\ \Phi(x)=x$ の場合に帰着される。

(A)の証明.　Hölder の不等式により

$$\varphi(t,x) \leqq C_1\, t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p}$$

また

$$\int \varphi(t,x)^p dx \leqq C_1 \int_{\Omega}\int_{Q} |f(x+tz)|^p dz\, dx = C_2 \|f\|_{L^p}^p$$

一般に $q \geqq p$ のとき,

$$\left(\int \varphi(t,x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \left(\sup \varphi(t,x)\right)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\|\varphi(t,x)\|_{L^p}\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\leqq C_3\, t^{-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|f\|_{L^p} .$$

(B)の証明.

$\lambda = l - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$ のときは, (A) により明白.

$\lambda = l - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0,\quad p < q < \infty$ とする. x_1 を固定し, $x = (x_1, x')$ とする. 変数 x', z' について, (A)の結果を用い, Jessen の不等式に代入すると, $g(x_1+tz_1) = \|f(x_1+tz_1, x')\|_{L^p(\Omega(x_1+tz_1))}$ とおくと,

$$\left(\int \varphi(t,x)^q dx'\right)^{1/q} \leqq \int_{|z_1| \leqq M_1} dz_1 \left[\int \left\{\int_{Q'} |f(x,z)|\, dz'\right\}^q dx'\right]^{1/q}$$

$$\leqq C_4\, t^{-\left(\frac{n-1}{p}-\frac{n-1}{q}\right)} \int_{|z_1| \leqq M_1} g(x_1+tz_1)\, dz_1$$

である. したがって, $n=1,\quad \mu = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ のとき,

$$\left\| \int_0^\infty t^{\mu-1} dt \int_{|z| \leqq M_1} |f(x+tz)|\, dz \right\|_{L^q} \leqq C \|f\|_{L^p} \qquad (9)$$

が成立することをいえばよい. 任意の $g \in L_{q'}$ $\left(q' = \frac{q}{q-1}\right)$ について,

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1} dt \int_{|z| \leqq M_1} |f(x+tz)|\,|g(x)|\, dx\, dz \qquad (\ x+tz=y\ と変換)$$

$$= C_2 \iint \frac{|f(y)|\,|g(x)|}{|x-y|^{1-\mu}}\,dx\,dy \leq C\|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q}$$

([4] の p.288)

であるから (9) が示された。証明終り。

補題1の証明　$m>0$, $1>k>0$ の場合。

$$\psi(t,x) = \int K(x,\tilde{\xi})\, f(\Phi(x)+t\tilde{\xi}+t\tilde{\Psi}(\Phi(x)))\,d\tilde{\xi}$$

とおく。

変数変換により，

$$\psi(t,y) = \int K(y, \tilde{\xi}+t^{-1}(\Phi(x)-\Phi(y))+\tilde{\Psi}(\Phi(x))-\tilde{\Psi}(\Phi(y)))\cdot f(\Phi(x)+t\tilde{\xi}+t\tilde{\Psi}(\Phi(x)))\,d\tilde{\xi}$$

となること，および，$K, \Phi, \tilde{\Psi}$ が Lipschitz 連続であるから，

$$\left|K(x,\tilde{\xi})-K\left(y,\tilde{\xi}+\frac{\Phi(x)-\Phi(y)}{t}+\tilde{\Psi}(\Phi(x))-\tilde{\Psi}(\Phi(y))\right)\right| \leq C_1\,\chi\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \quad (10)$$

$$\chi(s)=\min(1,\ s^{k+\varepsilon}),\quad 0<\varepsilon\leq 1-k,\ \frac{m}{q}$$

であることにより，

$$|\psi(t,x)-\psi(t,y)| \leq C_1\chi\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\int|f(\Phi(x)+t\tilde{\xi}+t\tilde{\Psi}(\Phi(x)))|\,d\tilde{\xi}$$

を得る。ただし，右辺の積分範囲は $Q\cup(Q+t^{-1}(\Phi(y)-\Phi(x))+\tilde{\Psi}(\Phi(y))-\tilde{\Psi}(\Phi(x)))$ である。第2の範囲で $\xi\to\xi+t^{-1}(\Phi(y)-\Phi(x))+\tilde{\Psi}\circ\Phi(y)-\tilde{\Psi}\circ\Phi(x)$ と変換すれば，右辺の積分は $\varphi(t,x)+\varphi(t,y)$ に等しい。ただし，

$$\varphi(t,x) = \int_Q |f(\Phi(x)+t\tilde{\xi}+t\tilde{\Psi}(\Phi(x)))|\,d\tilde{\xi}$$

とする。ゆえに，

$$|F(x)-F(y)| \leq C_1\int_0^T t^{k-1}\,\chi\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\{\varphi(t,x)+\varphi(t,y)\}\,dt \quad \cdots(11)$$

となる。

$x'', y'' \in \mathbb{R}^{n-m}$ を固定して，$x=(x', x'')$，$y=(y', y'')$ とおくとき，

$$\| \, |x-y|^{-(\frac{m}{q}+k)} \chi\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \|_{L^q(\Omega(y''))} \leqq C_2 \, t^{-k}$$

であるから，

$$G(x, y) = \int_0^T t^{\ell-1} \chi(t^{-1}|x-y|) \varphi(t, x) \, dt$$

とおくと，

$$\| \, |x-y|^{-\frac{m}{q}-k} G(x, y) \|_{L^q(\Omega(y''))} \leqq C_2 \int_0^T t^{\ell-k-1} \varphi(t, x) dt$$

となり，この右辺に補題2を適用して，

$$\| (x-y)^{-\frac{m}{q}-k} G(x, y) \|_{L^q(\Omega(x'')\times\Omega(y''))} \leqq C \, T^{\lambda} \|f\|_{L^p(\tilde{\Omega})}$$

(11) により結論をうる。

$0 < k < 1$，$m = 0$ の場合．$\lambda = 0$ としてよい．不等式(10) において $\ell + k$ を 1 にとる．上の場合と同様にして，

$$|F(x) - F(y)| \leqq C_1 \left(G(x, y) + G(y, x) \right)$$

である．補題2，(A) により

$$\varphi(t, x) \leqq C_2 \, t^{-\frac{n+s}{p}} \|f\|_{L^p}$$

であるから，

$$|G(x, y)| \leqq C_2 \int_0^\infty t^{\ell-1} \chi\left(\frac{|x-y|}{t}\right) t^{-\frac{n+s}{p}} dt \cdot \|f\|_{L^p}$$
$$\leqq C |x-y|^{k} \|f\|_{L^p} \qquad (\because \ \ell - \tfrac{n+s}{p} = k)$$

証明終り。

文献

[1] Besov, O. V. D.A.N 126, No. 6 (1959), 1163-1165

[2] Gagliardo, E. Ricerche di Mat. 7 (1958), 102-137

[3] Gagliardo, E Rend. Sem. Math. Univ. di Padova 27(1957). 284-305.

[4] Hardy, Littlewood & Polya: Inequalities. 1934.

[5] Lions; Magnes. Ann. S. Norm. S. Pisa 15 (1961) 39-101

[6] Nirenberg, L. Ann. S. Norm. Sup. Pisa 13 (1959) 115-161.

[7] Peetre, J. Ann. Inst. Fourier Grenoble. 16 (1966) 279-317.

[8] du Plessis, N. Trans. Amer. Math. S. 80 (1955) 124-134

[9] Slobodeskii, L. I. D.A.N. 118 No. 2 (1958) 243-246

[10] Sobolev, S. L. Mat. Sb. 4 (46), 3 (1938) 471-497

[11] Sobolev, S. L. Some applications of functional analysis to mathematical physics (1950)

[12] Uspenskii, S. V. D. A. N. 132 No. 5 (1960) 992-993

[13] Uspenskii, S. V. D. A. N 132 No. 1 (1960) 60-62.

[14] Nikol'skii, S. M. Usp. Mat. N. 16 (1961) No. 5 63-114.